Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2024.

1. Koji je broj veći,

$$A = 2022 \cdot (2024^2 - 2024 + 1) \qquad \text{ili} \quad B = 2024^3 - 3 \cdot 2024^2 + 3 \cdot 2024 \ ?$$

2. Neka su a, b, c, d međusobno različiti cijeli brojevi takvi da vrijedi

$$(a - 2024)(b - 2024)(c - 2024)(d - 2024) = 9.$$

Odredi $a + b + c + d$.

3. Farmer Ivan na svojoj farmi ima kokoši, svinje i ovce. Njegove životinje imaju ukupno 46 glava i 124 noge. Kada bi udvostručio broj kokoši i utrostručio broj ovaca na farmi, uz isti broj svinja, ukupan broj nogu svih životinja na farmi bio bi 232. Koliko bi u tom slučaju bilo glava?

4. Odredi najmanji prirodni broj kojem je zbroj znamenaka djeljiv sa 7 te ima svojstvo da je zbroj znamenaka njegovog sljedbenika također djeljiv sa 7.

5. Neka je ABC pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu C. Neka je P točka takva da je kut $\sphericalangle ABP$ je pravi, da vrijedi $|BP| = |BC|$ te da su točke P i C su na suprotnim stranama pravca AB. Dokaži da je pravac CP okomit na simetralu kuta $\sphericalangle BAC$.

* * *

6. Dan je trokut ABC površine 1. Točka D polovište je dužine $\overline{BC}$, točka E polovište je dužine $\overline{AD}$, točka F polovište je dužine $\overline{BE}$ te je točka G polovište dužine $\overline{CF}$. Odredi površinu trokuta EFG.

7. Koliko ima peteroznamenkastih prirodnih brojeva kojima je umnožak znamenaka jednak 900 ?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2024.

1. Odredi sve realne brojeve k za koje se tjeme parabole s jednadžbom

$$y = 4x^2 - 4(k+1)x + k^2 + 4k - 1$$

nalazi na paraboli čija je jednadžba $y = 4x^2 - 2x - 8$.

2. Odredi sve uređene parove cijelih brojeva (x, y) takve da je

$$x^2 + y^2 = 10(x + y).$$

3. Za realne brojeve a i b jednadžba $x^2 + ax + b = 0$ ima dva cjelobrojna rješenja (ne nužno različita). Dokaži da jednadžba $x^2 + 5ax + (6a^2 + b) = 0$ također ima dva cjelobrojna rješenja.

4. Riješi nejednadžbu

$$\frac{(1+x)^2}{1+y} \leqslant 1 + \frac{x^2}{y}.$$

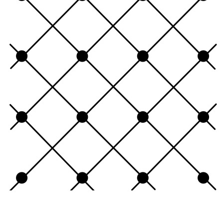
Za koje parove (x, y) se postiže jednakost?

5. Neka je $\overline{AB}$ promjer kružnice k, a točka O njeno središte. Neka je C točka izvan kružnice k na simetrali dužine $\overline{AB}$. Dužina $\overline{AC}$ siječe kružnicu k u točki D. Ako je $|AB| = 2$ i $|CD| = 1$, odredi $|OC|$.

* * *

6. Kažemo da je prirodni broj $n \geqslant 2$ *tajanstven* ako za svaki njegov djelitelj d veći od 1 vrijedi $d^2 + n \mid n^2 + d$. Odredi sve tajanstvene prirodne brojeve.

7. Na slici je prikazan skup od 16 točaka raspoređenih na 10 istaknutih pravaca. Za dvije točke tog skupa kažemo da su *vezane* ako pripadaju istom istaknutom pravcu.



a) Koliko je najviše točaka promatranog skupa moguće odabrati tako da među njima ne bude vezanih točaka?

b) Odredi broj podskupova promatranog skupa točaka bez vezanih točaka s najvećim mogućim brojem elemenata.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2024.

1. Odredi sva realna rješenja nejednadžbe

$$\log_9 x^2 - \log_3(x+8) \leqslant \log_{\frac{1}{3}}(x-3) - 1.$$

2. Ako je $\dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 1}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2} = \dfrac{4}{9}$, odredi $\sin x \cos x$.

3. Dan je trokut ABC površine 5. Ako za duljine stranica tog trokuta vrijedi jednakost $|AB|^2 + |AC|^2 = 17 + |BC|^2$, odredi tangens kuta $\sphericalangle CAB$.

4. Na školskom natjecanju iz matematike sudjelovalo je 1200 učenika. Broj bodova koje učenik može ostvariti je cijeli broj između 0 i 50. Računalnom greškom svim je učenicima koji su ostvarili 3 ili manje bodova zapisan rezultat 0 bodova, a svim učenicima koji su ostvarili 47 ili više bodova zapisano je 50 bodova. Zbog te greške, prosječni rezultat na natjecanju prema podacima u računalu veći je za 0.1 od stvarnog.

Dokaži da postoje brojevi a i b takvi da se broj učenika koji su ostvarili točno a bodova i broj učenika koji su ostvarili točno b bodova razlikuje za barem 20.

5. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je vrijednost izraza

$$\frac{n^2 - 22 + \log_2 n}{n-5}$$

cijeli broj.

* * *

6. Kružnice k_1, k_2 i k_3 sa središtima S_1, S_2, S_3 i polumjerima duljina $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, redom, međusobno se dodiruju izvana tako da je A diralište kružnica k_1 i k_2, B diralište kružnica k_2 i k_3 te C diralište kružnica k_3 i k_1. Odredi površinu trokuta ABC.

7. Odredi proste brojeve p, q, r i prirodni broj n za koje vrijedi

$$p^2 = q^2 + r^n.$$

Nađi sva rješenja.

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

ŠKOLSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

26. siječnja 2024.

1. Djevojke Marija i Magdalena igraju šahovski meč u tri partije. Vjerojatnosti da Marija u pojedinoj partiji pobijedi, izgubi ili da partija završi remijem su međusobno jednake. Ukupna pobjednica meča je djevojka koja ostvari više pobjeda (u tri partije), a ako budu imale jednak broj pobjeda, meč završava neodlučenim rezultatom.

Kolika je vjerojatnost da Marija bude ukupna pobjednica meča?

2. Odredi sve uređene parove (p, n) gdje je p prost, a n prirodan broj za koje vrijedi

$$1 + p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n = 2801.$$

3. Neka je (a_n) niz definiran sa $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ i

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2} \quad \text{za } n \geqslant 3.$$

Dokaži da vrijedi $a_{2024} \geqslant \sqrt{2024!}$.

4. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (m, n, k) za koje vrijedi

$$D(m, 20) = n, \quad D(n, 15) = k \quad \text{i} \quad D(m, k) = 5,$$

gdje je $D(a, b)$ najveći zajednički djelitelj brojeva a i b.

5. Neka su z_1, z_2 i z_3 kompleksni brojevi takvi da je $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ te $4z_3 = 3(z_1 + z_2)$. Koliko je $|z_1 - z_2|$?

$* \quad * \quad *$

6. Pravokutni trokuti ABC i ABD imaju zajedničku hipotenuzu $\overline{AB}$, a katete $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ im se sijeku u točki E. Neka je F ortogonalna projekcija točke E na pravac AB. Dokaži da je FE simetrala kuta $\sphericalangle CFD$.

7. Niz znamenaka sastoji se od jedinica i nula. Među bilo kojih 200 uzastopnih znamenaka jednako je jedinica i nula, a među bilo koje 202 uzastopne znamenke broj jedinica i broj nula se razlikuju. Koja je najveća moguća duljina takvog niza?

Prvih pet zadataka vrijedi po 6 bodova, a zadnja dva zadatka po 10 bodova.